$y'' + 8y' + 16y = \begin{cases} 0 & t<2 \\ 1 & 2 \le t \le 4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$ $\quad y(0)=1 \quad y'(0)$

$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = (s^2 - s) \cdot Y(s)$ $\quad \mathcal{L}\{16y\} = 16 \cdot Y(s)$

$\mathcal{L}\{8y'\} = 8 \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) = 8 \cdot (s \cdot Y(s) - 1)$

$\mathcal{L}\{u_2(t-2)\} = \frac{1}{s} e^{-2s} \quad \mathcal{L}\{u_4(t-4)\} = \frac{1}{s} e^{-4s}$

$s^2 \cdot Y(s) - s + 8 \cdot (s \cdot Y(s) - 1) + 16 \cdot Y(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} e^{-4s}$

$s^2 \cdot Y(s) - s + 8 \cdot s \cdot Y(s) - 8 + 16 \cdot Y(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s}$

$s^2 \cdot Y(s) + 8 \cdot s \cdot Y(s) + 16 Y(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s} + s + 8$

$Y(s) \cdot (s^2 + 8s + 16) = \frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s} + s + 8$

$(s+4)(s+4)$

$Y(s) = \left[\frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s} + s + 8\right] \cdot \frac{1}{s^2 + 8s + 16}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$

$Y(s) = \left[\frac{1}{s} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-4s} + s + 8\right] \cdot \frac{1}{(s+4)(s+4)}$

$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s+4)^2} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \cdot e^{-4s} + \frac{s+8}{(s+4)(s+4)}$

$Y(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot e^{-2s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \cdot e^{-4s} + \frac{s+4+4}{(s+4)(s+4)}$

$Y(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \cdot e^{-4s} + \frac{s+4}{(s+4)(s+4)} + \frac{4}{(s+4)(s+4)}$

$Y(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot e^{-2s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+4)^2} \cdot e^{-4s} + \frac{1}{s+4} + \frac{4}{(s+4)(s+4)}$

$\frac{1}{s(s+4)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B \cdot s + C}{s(s+4)^2} + \frac{C}{(s+4)^2}$

$1 = A \cdot (s+4)^2 + B \cdot (s(s+4)) + C \cdot s$

$1 = \underline{A \cdot s^2} + \underline{8 \cdot A \cdot s} + \underline{16 \cdot A} + \underline{B \cdot s^2} + \underline{4 \cdot B s} + \underline{C s}$

$s^2 \mid A + B = 0 \rightarrow B = -A = -\frac{1}{16}$

$s^1 \mid 8A + 4B + C = 0$

$s^0 \mid 16 \cdot A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{16}$

$C = -8A - 4B = -\frac{8}{16} - \left(-\frac{4}{16}\right) = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{16} \mid B = -\frac{1}{16} \mid C = -\frac{1}{4}$

$$Y(s) = \left[ +\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(s+4)^2} \right]\cdot e^{-2\cdot s} +$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$- \left[ +\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s+4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(s+4)^2} \right]\cdot e^{-4\cdot s} + \frac{1}{s+4} + \frac{4}{(s+4)^2}\Bigg|_{s:=s+4}$$

$$y(t) = \frac{1}{16}\cdot 1(t-2) - \frac{1}{16}\cdot e^{-4\cdot(t-2)} - \frac{1}{4}\cdot e^{-4\cdot(t-2)}\cdot(t-2) +$$

$$-\frac{1}{16}\cdot 1(t-4) + \frac{1}{16}\cdot e^{-4(t-4)} - \frac{1}{4}\cdot e^{-4\cdot t}\cdot(t-4) + e^{-4\cdot t} + 4\cdot e^{-4\cdot t}\cdot t$$

$$\mathcal{L}[e^{a\cdot t}\cdot f(t)] = F(s+a)$$

http://www.mbstudent.com/maths-examples.html

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = F(s)\cdot e^{-a\cdot s}$$

$$y(t) = e^{-4\cdot t} + 4\cdot t\cdot e^{-4\cdot t} + \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cdot e^{-4\cdot t} - t\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{-4\cdot t}\right]\cdot\eta(t-2) +$$

$$-\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cdot e^{-4\cdot t} + \frac{1}{4}\cdot e^{-4\cdot t}\right]\eta(t-4)$$

0.4